

Anwendung Tauberscher Sätze
und Lambertscher Reihen
in der zahlentheoretischen Asymptotik

Teildruck der
Inauguraldissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Hans Gutmann
aus Basel

Buchdruckerei Birkhäuser AG., Basel

1958

Anwendung Tauberscher Sätze
und Lambertscher Reihen
in der zahlentheoretischen Asymptotik

Teildruck der

Inauguraldissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Hans Gutmann

aus Basel



Buchdruckerei Birkhäuser AG., Basel

1958

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der Herren Professoren Dr. A. OSTROWSKI und Dr. H. HUBER.

Basel, den 20. Mai 1958.

Prof. Dr. K. MEYER, Dekan

Herrn HANS GUTMANN wurde von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel am 20. Mai 1958 erlaubt, diesen Teildruck seiner am 20. Mai 1958 genehmigten Inauguraldisser-
tation drucken zu lassen. Die vollinhaltliche Arbeit mit dem Titel:

*Anwendung Tauberscher Sätze und Lambertscher Reihen
in der zahlentheoretischen Asymptotik*

kann eingesehen oder entliehen werden:

1. im Mathematischen Institut der Universität Basel;
2. in der Universitätsbibliothek Basel;
3. in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

Sonderabdruck

Verh. Naturf. Ges. Basel	Band 69	Nr. 2	S. 119-144	Basel, 10. 2. 1959
--------------------------	---------	-------	------------	--------------------

Birkhäuser AG.

Anwendung Tauberscher Sätze und Lambertscher Reihen in der zahlentheoretischen Asymptotik

von

HANS GUTMANN

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	119
Kapitel I	120
§ 1. Definitionen und Hilfssätze	120
Kapitel II	127
§ 2. Die Funktionen $f_n(x)$, $g_n(x)$ und $h_n(x)$	127
§ 3. Die Grenzfunktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$	133
§ 4. Das Verhalten der Funktionen $f_n(x)$, $g_n(x)$, $h_n(x)$ und ihrer Grenzfunktionen für $x \uparrow 1$	135
Zusammenfassung des III. und IV. Kapitels	141
Literaturverzeichnis	144

VERZEICHNIS DER DEFINITIONEN

Die Mengen: B , $B^{(n)}$ (D_1 , S. 120); M (D_4 , S. 121), $M^{(n)}$ (D_3 , S. 121).
 Die Zahlen: $\lambda, \lambda^{(n)}$ (D_2 , S. 120); $b(D_1$, S. 120); $\omega(v)$, $\omega^{(n)}(v)$ (D_3 , S. 121); $B(m)$ (D_2 , S. 120); $A(x)$, $A^{(n)}(x)$ (D_2 , S. 120); $t(v)$, $t^{(n)}(v)$, $T(x)$, $T^{(n)}(x)$ (D_5 , S. 121); $P(n)$, $Q(n)$, $R(n)$, $S(n)$, P , Q , R , S , $\Phi(n)$ (D_7 , S. 122).
 Intervalle: J , J_0 , $J(v)$ (D_6 , S. 121).

Einleitung

Betrachten wir, als eine Verallgemeinerung der Folge der Primzahlen, eine Folge B von paarweise zueinander teilerfremden natürlichen Zahlen, so stellt sich die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Anzahl, der Summe, der Summe der reziproken Werte und der Summe der Logarithmen der durch die Zahlen von B nicht teilbaren Zahlen, sowie der Teilerzahlen und Teilersummen der durch die Zahlen von B teilbaren Zahlen.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Fragen für eine Folge B : b_1 , b_2 , ..., b_n , ... behandelt, deren

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v} \text{ bzw. } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v}$$

konvergiert. Im I. Teil finden sich die notwendigen Definitionen und Hilfssätze und im IV. Teil die in den Sätzen 30 bis 35 zusammengestellten zahlentheoretischen Ergebnisse.

Diese Sätze wurden mit Hilfe einiger Sätze von Tauberschem Charakter über Potenzreihen hergeleitet. Diese Methode wurde bis jetzt in der Zahlentheorie wenig verwendet, doch ergeben sich damit einige Identitäten (Korollar 1 und Sätze 34 und 35) und exakte Ergebnisse.

Um die erwähnten Sätze von Tauberschem Charakter, welche von HARDY und LITTLEWOOD stammen, anwenden zu können, werden im II. Teil, in den §§ 2 und 3 und im III. Teil, in den §§ 5 und 6 rekurrent, Lambertsche Reihen erzeugt, deren zugehörige Potenzreihen zahlentheoretisch interessante Koeffizienten und Exponenten aufweisen. Unter der oben erwähnten Voraussetzung für die Folge B kann das Verhalten dieser Potenzreihen für $x \uparrow 1$ untersucht werden. Dem Grenzverhalten dieser Reihen sind die §§ 4 und 7 des II. bzw. des III. Teils gewidmet. Die Ergebnisse finden sich in den Sätzen 9 bis 15 und 23 bis 29.

Die Idee, die Primzahlen durch die Folge der b -Zahlen zu ersetzen, ist nicht neu, sie stammt wohl von A. BEURLING*, doch sind die in dieser Arbeit untersuchten Fragen meines Wissens in der Literatur bis jetzt noch nicht behandelt worden.

KAPITEL I

§ 1. Definitionen und Hilfssätze

1.1. Definitionen

D_1

Die b -Zahlen der Menge B

Es sei (b_k) eine Folge von paarweise zueinander teilerfremden natürlichen Zahlen $b_1 < b_2 < \dots < b_k < \dots$. Eine Zahl dieser Folge nennen wir kurz eine b -Zahl. Ist die Anzahl der b -Zahlen unendlich, so bezeichnen wir die Folge (b_k) mit B . Enthält die Folge (b_k) nur endlich viele, etwa n b -Zahlen, so setzen wir $(b_k) = B^{(n)}$ und $\pi_n = \prod_{v=1}^n b_v$.

D_2

Die Zahlen $\lambda_v, \lambda_v^{(n)}, A(x), A^{(n)}(x)$ und $B(m)$

Wir betrachten alle natürlichen Zahlen, welche durch keine b -Zahl von B bzw. $B^{(n)}$ teilbar sind und bezeichnen sie, der Grösse nach geordnet, mit $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ bzw. $\lambda_1^{(n)} = 1, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \dots$. Die Anzahl der $\lambda \leq x$ bzw. $\lambda^{(n)} \leq x$ bezeichnen wir mit $A(x)$ bzw. $A^{(n)}(x)$.

* Acta Math. 68, pg. 255–291.

Die Zahl $B(m)$ ist gleich der Anzahl der Darstellungen der natürlichen Zahl m als Summe $\lambda_\nu + \lambda_\mu$, die Zerlegungen in ungleiche λ doppelt gezählt.

D_3 Die Zahlen $\omega(\nu)$, $\omega^{(n)}(\nu)$, β und die Menge $M^{(n)}$

Für ein natürliches ν ist $\omega(\nu)$ bzw. $\omega^{(n)}(\nu)$ die Anzahl der b -Zahlen von B bzw. $B^{(n)}$, durch welche ν teilbar ist.

Offenbar gilt für jedes n

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= \omega^{(n)}(\lambda^{(n)}) = 0, \\ \omega^{(n)}(\nu) &= \omega^{(n)}(\nu + k\pi_n), \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (1.1)$$

Bilden wir nun aus den Zahlen $1, b_1, b_2, \dots, b_n$ die b^2 -freien Zahlen β_μ :

$$\begin{array}{ll} 1, & \binom{n}{0} = 1 \text{ Glied} \\ b_1, b_2, \dots, b_n, & \binom{n}{1} \text{ Glieder} \\ b_1 \cdot b_2, b_1 \cdot b_3, \dots, b_1 \cdot b_n, b_2 \cdot b_3, \dots & \binom{n}{2} \text{ Glieder} \\ \vdots & \\ b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k, b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{k-1} \cdot b_{k+1}, \dots & \binom{n}{k} \text{ Glieder} \\ \vdots & \\ b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n & \binom{n}{n} = 1 \text{ Glied}, \end{array}$$

so stehen in der $(k+1)$ -ten Zeile ($k = 2, 3, \dots, n$) die $\binom{n}{k}$ Produkte, die allen Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung der n verschiedenen b -Zahlen von $B^{(n)}$ zu je k entsprechen. Die Gesamtheit dieser Zahlen β_μ , $\beta_1 = 1$ gesetzt, bezeichnen wir mit $M^{(n)}$. Die Elemente von $M^{(n)}$ nennen wir kurz die b -Teiler von π_n .

D_4 Die Menge M

Die Menge M ist die Vereinigungsmenge $\sum_{\nu=1}^{\infty} M^{(\nu)} = M$, sie enthält alle Zahlen β , die in mindestens einer der Mengen $M^{(1)}, M^{(2)}, \dots$ vorkommen.

D_5 Die Zahlen $t^n(\nu)$, $t(\nu)$, $T^{(n)}(x)$ und $T(x)$

Die Anzahl der b -Teiler β von $M^{(n)}$ bzw. M , durch welche ein natürliches ν teilbar ist, nennen wir die zu ν gehörige Teilerzahl $t^n(\nu)$ der Menge $M^{(n)}$ bzw. die zu ν gehörige Teilerzahl $t(\nu)$ der Menge M .

Wir setzen

$$T^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{[x]} t^{(n)}(\nu), \quad T(x) = \sum_{\nu=1}^{[x]} t(\nu).$$

D_6 Einige Intervallbezeichnungen

Im folgenden bedeutet $J(r)$ das Intervall $0 \leq x \leq r < 1$, J das Intervall $0 \leq x < 1$ und J_0 : $0 < x < 1$.

D₇

Einige Zeichen

Unter $\sum$ bzw. Σ verstehen wir die über alle $\beta \prec M^{(n)}$ bzw. die über alle $\beta \prec M$ erstreckte Summe. Mit $\prod$ bzw. Π bezeichnen wir das über alle b -Zahlen von $B^{(n)}$ bzw. B erstreckte Produkt. Insbesondere setzen wir:

$$P(n) = \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{1}{b_v}\right), \quad P(0) = 1,$$

$$S(n) = \prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{1}{b_v}\right), \quad S(0) = 1, \quad Q(n) = \sum_{v=1}^n \frac{\log b_v}{b_v - 1}, \quad Q(0) = 0,$$

$$R(n) = \sum_{v=1}^n \frac{\log b_v}{b_v + 1}, \quad R(0) = 0, \quad P = \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{b_v}\right), \quad S = \prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{b_v}\right),$$

$$Q = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v - 1}, \quad R = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v + 1},$$

falls diese unendlichen Produkte und Summen existieren. Ferner setzen wir zur Abkürzung $\Phi(n) = A^{(n)}(\pi_n)$.

1.2. Hilfssätze

Die Zahlen $\beta \prec M^{(n)}$ sind nach D₃ die Produkte, welche allen Kombinationen ohne Berücksichtigung der Anordnung der paarweise zueinander teilerfremden b -Zahlen von $B^{(n)}$ entsprechen. Die Zahlen der Menge $M^{(n)}$ sind daher alle voneinander verschieden, und ihre Anzahl ist nach D₃

$$\sum_{\beta \prec M^{(n)}} 1 = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} = 2^n.$$

Ebenso ergibt sich

$$\sum_{\beta \prec M^{(n)}} (-1)^{\omega^{(n)}(\beta)} = \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} = 0.$$

Daher gilt:

LEMMA 1. Die Menge $M^{(n)}$ enthält 2^n -Zahlen, sie sind alle voneinander verschieden, und es gilt

$$\sum_{\beta \prec M^{(n)}} 1 = 2^n, \quad \sum_{\beta \prec M^{(n)}} (-1)^{\omega^{(n)}(\beta)} = 0, \quad (1.2)$$

$$t^{(n)}(v) = 2^{\omega^{(n)}(v)}, \quad t(v) = 2^{\omega(v)}.$$

Da nach D_3 $M^{(1)} < M^{(2)} < M^{(3)} < \dots < M^{(n)} < \dots$ ist, so existiert die Grenzmenge $\lim_{n \rightarrow \infty} M^{(n)} = M^1$; es gilt daher

LEMMA 2. Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} M^{(n)} = M$.

Für $A^{(n)}(x)$ und $T^{(n)}(x)$ gilt nun

LEMMA 3. Für jedes n ist

$$A^{(n)}(x) = \sum_{\beta < M^{(n)}} (-1)^{\omega^{(n)}(\beta)} \left[\frac{x}{\beta} \right], \quad T^{(n)}(x) = \sum_{\beta < M^{(n)}} \left[\frac{x}{\beta} \right].$$

Beweis: Der Ausdruck für $A^{(n)}(x)$ ist bekannt². Ist $\beta < M^{(n)}$, so ist $[x/\beta]$ der Beitrag von β zu $T^{(n)}(x)$, denn $[x/\beta]$ ist die Anzahl der natürlichen Zahlen $\leq x$, welche durch β teilbar sind. Daraus folgt aber die Behauptung.

Wir benötigen nun und auch später sehr oft das folgende

LEMMA 4. Es seien $B^{(n)}$ bzw. $B^{(n+1)}$ die Folgen der b -Zahlen $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ bzw. $b_1 < \dots < b_n < b_{n+1}$ und $M^{(n)}$ bzw. $M^{(n+1)}$ die zu diesen Folgen gehörigen b -Teiler-Mengen. Ferner sei $M_1^{(n)}$ die Menge der b -Teiler, welche durch Multiplikation aller $\beta < M^{(n)}$ mit b_{n+1} entstehen. Dann gilt für jedes n

$$M^{(n+1)} = M^{(n)} + M_1^{(n)}.$$

Nach Lemma 1 enthält $M^{(n)}$ 2^n Zahlen, die alle voneinander verschieden sind. Multiplizieren wir nun alle $\beta < M^{(n)}$ mit b_{n+1} , so enthält $M_1^{(n)}$ ebenfalls 2^n Zahlen, die alle voneinander und von den $\beta < M^{(n)}$ verschieden sind, da b_{n+1} zu allen $\beta < M^{(n)}$ teilerfremd ist. $M^{(n)} + M_1^{(n)}$ enthält daher Zahlen $\beta < M^{(n+1)}$.

Berücksichtigen wir D_7 , so gilt:

LEMMA 5. Für jedes n ist

$$P(n) = \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{1}{b_v} \right) = \sum_{\beta < M^{(n)}} \frac{(-1)^{\omega^{(n)}(\beta)}}{\beta}. \quad (1.3)$$

$$S(n) = \prod_{v=1}^n \left(1 + \frac{1}{b_v} \right) = \sum_{\beta < M^{(n)}} \frac{1}{\beta}. \quad (1.4)$$

$$P(n) Q(n) = - \sum_{\beta < M^{(n)}} \frac{(-1)^{\omega^{(n)}(\beta)}}{\beta} \log \beta, \quad (1.5)$$

$$R(n) S(n) = \sum_{\beta < M^{(n)}} \frac{\log \beta}{\beta}. \quad (1.6)$$

¹ Vgl. etwa SCHLESINGER & PLESSNER, Lebesguesche Integrale, S. 6.

² POLYA & SZEGÖ II, S. 120, A. 24.

Wir beweisen zunächst (1.3) und (1.4). Für $n = 1$ enthält $M^{(1)}$ die beiden b -Teiler $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = b_1$, es ist daher $P(1) = 1 - 1/b_1$, $Q(1) = 1 + 1/b_1$. (1.3) und (1.4) sind wahr für $n = 1$.

(1.3) und (1.4) seien wahr für $n = k$. Ist nun $n = k + 1$, so folgt aus Lemma 4 die Zerlegung $M^{(k+1)} = M^{(k)} + M_1^{(k)}$, und daher

$$P^*(k+1) = \sum_{\beta < M^{(k+1)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)}}{\beta} = \sum_{\beta < M^{(k)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)}}{\beta} + \sum_{\beta < M_1^{(k)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)}}{\beta}.$$

Nun ist für alle $\beta < M^{(k)}$ $\omega^{(k+1)}(\beta) = \omega^{(k)}(\beta)$ und für alle $\beta < M_1^{(k)}$ $\omega^{(k+1)}(\beta) = \omega^{(k)}(\beta) + 1$, es ist folglich

$$\begin{aligned} P^*(k+1) &= \sum_{\beta < M^{(k)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k)}(\beta)}}{\beta} + \sum_{\beta < M^{(k)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k)}(\beta)+1}}{\beta b_{\beta+1}} = \\ &= P(k) - \frac{1}{b_{k+1}} P(k) = P(k+1). \end{aligned}$$

(1.3) ist wahr für $n = k + 1$ und gilt daher für alle n . Ersetzt man in diesem Beweise $(-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)}$ durch 1, so erhält man den Beweis für (1.4).

Auch (1.5) und (1.6) beweisen wir durch Induktion. Für $n = 1$ enthält $M^{(1)}$ die beiden b -Teiler $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = b_1$, es ist daher

$$- \sum_{\beta < M^{(1)}} \frac{(-1)^{\omega^{(1)}(\beta)}}{\beta} \log \beta = \frac{\log b_1}{b_1} = \frac{b_1 - 1}{b_1} \cdot \frac{\log b_1}{b_1 - 1} = P(1) R(1).$$

(1.5) ist wahr für $n = 1$.

(1.5) sei wahr für $n = k$. Ist nun $n = k + 1$, so ist nach Lemma 4 und dem vorhin über $\omega^{(k+1)}(\beta)$ Gesagten

$$\begin{aligned} - \sum_{\beta < M^{(k+1)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)}}{\beta} \log \beta &= - \sum_{\beta < M^{(k)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k)}(\beta)}}{\beta} \log \beta + \sum_{\beta < M^{(k)}} \frac{(-1)^{\omega^{(k)}(\beta)}}{b_{k+1}} \log \beta b_{k+1} = \\ &= P(k) Q(k) + P(k) \frac{\log b_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{1}{b_{k+1}} P(k) Q(k) = \\ &= P(k+1) Q(k) + P(k) \frac{b_{k+1} - 1}{b_{k+1}} \cdot \frac{\log b_{k+1}}{b_{k+1} - 1} = \\ &= P(k+1) \left(Q(k) + \frac{\log b_{k+1}}{b_{k+1} - 1} \right) = P(k+1) Q(k+1). \end{aligned}$$

(1.5) ist wahr für $n = k + 1$ und daher für alle n gültig. Ersetzt man im Beweise $(-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)}$ durch 1, so folgt (1.6).

Insbesondere gilt nun

LEMMA 6. Für jedes n ist

$$\Phi(n) \equiv A^{(n)}(\pi_n) = \pi_n P(n),$$

$$T^{(n)}(\pi_n) = \pi_n S(n).$$

Denn für $x = \pi_n$ und $\beta \prec M^{(n)}$ ist $[x/\beta] = \pi_n/\beta$ eine ganze Zahl. Aus den Lemmata 3 und 5 ergibt sich daher

$$A^{(n)}(\pi_n) = \pi_n \sum_{\beta \prec M^{(n)}} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} = \pi_n P(n),$$

$$T^{(n)}(\pi_n) = \pi_n \sum_{\beta \prec M^{(n)}} \frac{1}{\beta} = \pi_n S(n).$$

Für die in D_7 definierten Summen und Produkte gilt nun

LEMMA 7. Ist $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v}$ konvergent, so existieren P und S .

Ist $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v}$ konvergent, dann existieren P, Q, R und S .

Die erste Aussage ist bekannt. Um die zweite Aussage zu beweisen, haben wir zu beachten, dass für alle v $b_v \geq 2$ ist und daher für alle v $b_v/(b_v - 1) \leq 2$ gilt. Daraus folgt aber nun

$$0 < \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v + 1} < \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v - 1} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{b_v}{b_v - 1} \cdot \frac{\log b_v}{b_v} \leq 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v},$$

d. h. die Existenz von Q und R . Aus

$$0 < \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v} < \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v}$$

folgt nun aber auch noch die Existenz von P und S .

1.3. In J gelten nun die folgenden Ungleichungen:

LEMMA 8. Ist $x \prec J$, so gilt für jedes natürliche b

$$b(1-x)x^b \leq (1-x^b) \log \frac{1}{1-x}, \quad (1.7)$$

$$b(1-x) \log \frac{1}{1-x^b} \leq (1-x^b) \log \frac{1}{1-x}. \quad (1.8)$$

Da in J $\log(1-x)^{-1} \geq x$ ist, so folgt für $0 < x < 1$

$$0 < \frac{(1-x)x^b}{(1-x^b) \log \frac{1}{1-x}} < \frac{x^b}{(1+x+\dots+x^{b-1})x} < \frac{x^b}{bx^b} = \frac{1}{b}.$$

(1.7) ist daher wahr für $0 < x < 1$, stimmt aber auch für $x = 0$; (1.7) ist wahr in J .

Für $b > 1$ ist für alle natürlichen v $bv > v + b - 1$; in J ist daher $x^{bv} \leq x^{v+b-1}$, also

$$\log \frac{1}{1-x^b} < x^{b-1} \log \frac{1}{1-x}.$$

Im Intervall $0 < x < 1$ gilt daher

$$0 < \frac{(1-x) \log \frac{1}{1-x^b}}{(1-x^b) \log \frac{1}{1-x}} < \frac{x^{b-1}}{bx^{b-1}} = \frac{1}{b}.$$

(1.8) ist daher wahr in $(0,1)$, ist aber auch für $x = 0$ richtig und gilt daher in J .

Im folgenden betrachten wir noch zwei weitere Grenzwerte:

LEMMA 9. Ist b eine natürliche Zahl, so gilt

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(\frac{x}{b(1-x)} - \frac{x^b}{1-x^b} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{b} \right), \quad (1.9)$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{(1-x) \log (1-x^b)}{(1-x^b) \log (1-x)} = \frac{1}{b}. \quad (1.10)$$

Nach der Regel von BERNOULLI DE l'HOSPITAL folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 1} \left(\frac{x}{b(1-x)} - \frac{x^b}{1-x^b} \right) &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^b - bx^b}{b(1-x^b)} = \\ &= \frac{1}{b^2} \left(b^2 - \sum_{v=1}^b v \right) = \frac{1}{b^2} \left(b^2 - \frac{b}{2} (b+1) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{b} \right), \end{aligned}$$

d. h. (1.9). (1.10) ergibt sich unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 1} \frac{(1-x) \log (1-x^b)}{(1-x^b) \log (1-x)} &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{\log (1-x) + \log (1+x+\dots+x^{b-1})}{(1+x+\dots+x^{b-1}) \log (1-x)} = \\ &= \lim_{x \uparrow 1} \frac{1 + (\log (1-x))^{-1} \log (1+\dots+x^{b-1})}{1+x+\dots+x^{b-1}} = \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

1.4. Sätze von Tauberschem Charakter

Wir erwähnen hier einige Sätze von Tauberschem Charakter, von denen wir später Gebrauch machen werden.

SATZ I³. Ist $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{v=1}^{\infty} a_v x^v = A$ und $a_v \geq 0$ für alle v , dann gilt für $N \rightarrow \infty$ $\sum_{v=1}^N a_v \sim N A$.

³ G. H. HARDY, D. S., S. 155, Th. 96.

SATZ II⁴. Ist $a_\nu \geq 0$ für alle ν , $A > 0$ und $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = A$, dann gilt $\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu x^{\nu-1} = A$.

SATZ III⁵. Ist $\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = A$ und $a_\nu \geq 0$ für alle ν , dann gilt für $N \rightarrow \infty$ $\sum_{\nu=1}^N a_\nu \sim \frac{1}{2} N^2 A$.

SATZ IV⁶. Ist $\lim_{x \uparrow 1} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = A$ und $a_\nu \geq 0$ für alle ν , dann gilt für $N \rightarrow \infty$ $\sum_{\nu=1}^N a_\nu \sim A \log N$.

SATZ V⁷. Ist $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = A$ und $a_\nu \geq 0$ für alle ν , dann gilt für $N \rightarrow \infty$ $\sum_{\nu=1}^N a_\nu \sim A N \log N$.

SATZ VI⁸. Ist $\lim_{x \uparrow 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = A$ und $s_n = \sum_{\nu=1}^n a_\nu = O(1)$, dann gilt für $N \rightarrow \infty$ $\sum_{\nu=1}^N s_\nu \sim A N$.

SATZ VII⁹. Ist $\lim_{x \uparrow 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x_\nu = A$ und $a_\nu = O(1/\nu)$, so ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = A$.

SATZ VIII¹⁰. Ist $\lim_{x \uparrow 1} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu = A$ und $a_\nu = O_R(1/\nu)$, so ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = A$.

KAPITEL II

§ 2. Die Funktionen $f_n(x)$, $g_n(x)$ und $h_n(x)$

2.1. Die Funktionen $f_n(x)$

D₈ Wir definieren die Funktionen $f_n(x)$ rekurrent durch folgende Gleichungen:

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) - f_n(x^{b_{n+1}}), \quad (2.1)$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad |x| \neq 1.$$

⁴ G. H. HARDY, D. S., S. 171, Th. 113.

⁵ G. H. HARDY, Proceedings L. M. S. London, Bd. 13, 1914.

⁶ und ⁷ siehe ⁵.

⁸ G. H. HARDY, D. S., S. 154, Th. 92.

⁹ G. H. HARDY, D. S., S. 154, Th. 90.

¹⁰ G. H. HARDY, D. S., S. 155, Th. 91. Dabei besagt $a_\nu = O_R(1/\nu)$, dass $\nu a_\nu < \text{const.}$ ist.

Diese so definierten Funktionen sind rationale Funktionen von x , deren Pole auf $|x| = 1$ liegen, und es gilt für sie die Darstellung:

SATZ 1. In $|x| < 1$ gilt für jedes n

$$f_n(x) = \sum_{\beta < M^{(n)}} (-1)^{\omega^{(n)}(\beta)} \frac{x^\beta}{1 - x^\beta}. \quad (2.2)$$

Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion. Ist $n = 1$, so enthält die Menge $M^{(1)}$ die beiden b -Teiler $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = b_1$. Aus (2.1) folgt daher wegen $\omega^{(1)}(1) = 0$, $\omega^{(1)}(b_1) = 1$

$$f_1(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{b_1}}{1-x^{b_1}},$$

(2.2) ist wahr für $n = 1$. (2.2) sei wahr für $n = k$. Ist nun $n = k + 1$, so folgt aus (2.1)

$$f_{k+1}(x) = \sum_{\beta < M^{(k)}} (-1)^{\omega^{(k)}(\beta)} \frac{x^\beta}{1 - x^\beta} - \sum_{\beta < M^{(k)}} (-1)^{\omega^{(k)}(\beta)} \frac{x^{\beta b_{k+1}}}{1 - x^{\beta b_{k+1}}}.$$

Nach Lemma 4 ist nun $M^{(k+1)} = M^{(k)} + M_1^{(k)}$ und für alle $\beta < M^{(k)}$, $\omega^{(k)}(\beta) = \omega^{(k+1)}(\beta)$, aber für alle $\beta < M_1^{(k)}$, $\omega^{(k)}(\beta) + 1 = \omega^{(k+1)}(\beta)$, es ist daher

$$- \sum_{\beta < M^{(k)}} (-1)^{\omega^{(k)}(\beta)} \frac{x^{\beta b_{k+1}}}{1 - x^{\beta b_{k+1}}} = \sum_{\beta < M_1^{(k)}} (-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)} \frac{x^\beta}{1 - x^\beta},$$

und folglich

$$f_{k+1}(x) = \sum_{\beta < M^{(k+1)}} (-1)^{\omega^{(k+1)}(\beta)} \frac{x^\beta}{1 - x^\beta}.$$

(2.2) ist also wahr für $n = k + 1$ und damit für jedes n gültig.

Wir leiten nun die Potenzreihe für $f_n(x)$ her.

SATZ 2. Ist $|x| \neq 1$, so gilt für jedes n

$$(1 - x^{n_n}) f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(n)} x^{\lambda_\nu^{(n)}}. \quad (2.3)$$

Ist $n = 1$ und $|x| \neq 1$, so ist nach (2.1)

$$f_1(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{b_1}}{1-x^{b_1}}, \text{ also } (1 - x^{b_1}) f_1(x) = \sum_{\nu=1}^{b_1-1} x^\nu.$$

Da nun $\Phi(b_1) = b_1 - 1$ und keine der ganzen Zahlen von 1 bis $b_1 - 1$ durch b_1 teilbar ist, so ergibt sich die Gültigkeit von (2.3) für $n = 1$.

(2.3) sei wahr für $n = k$, d. h. es sei

$$(1 - x^{n_k}) f_k(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(k)} x^{\lambda_\nu^{(k)}},$$

wo die $\lambda_\nu^{(k)}$ kleiner als π_k und durch keine Zahl von $B^{(k)}$ teilbar sind. Für $|x| \neq 1$ folgt dann aus (2.1)

$$\begin{aligned} (1 - x^{\pi_{k+1}}) f_{k+1}(x) &= (1 - x^{\pi_{k+1}}) (f_k(x) - f_k(x^{b_{k+1}})) = \\ &= (1 - x^{\pi_k \cdot b_{k+1}}) f_k(x) - (1 - (x^{b_{k+1}})^{\pi_k}) f_k(x^{b_{k+1}}) = \\ &= (1 - x^{\pi_k}) f_k(x) \sum_{\nu=0}^{b_{k+1}-1} x^{\nu \pi_k} - \sum_{\nu=1}^{\Phi(k)} x^{\lambda_\nu^{(k)} b_{k+1}} = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\Phi(k)} x^{\lambda_\nu^{(k)} b_{k+1}-1} \sum_{\nu=0}^{\pi_k} x^{\nu \pi_k} - \sum_{\nu=1}^{\Phi(k)} x^{\lambda_\nu^{(k)} b_{k+1}} = \\ &= C(x) - D(x), \end{aligned}$$

$$\text{wo } C(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(k)} x^{\lambda_\nu^{(k)} b_{k+1}-1} \sum_{\nu=0}^{\pi_k} x^{\nu \pi_k}, \quad D(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(k)} x^{\lambda_\nu^{(k)} b_{k+1}} \text{ ist.}$$

Nun sind die Gradzahlen der Polynome $C(x)$ und $D(x)$ kleiner als π_{k+1} , denn der Grad von $C(x)$ ist kleiner als $(b_{k+1} - 1) \pi_k + \pi_k = \pi_{k+1}$ und der von $D(x)$ kleiner als $b_{k+1} \pi_k = \pi_{k+1}$.

Die Glieder von $D(x)$, behaupten wir nun, treten in $C(x)$ auf, und alle übrigen Glieder von $C(x)$ haben Exponenten, die durch keine Zahl von $B^{(k+1)}$ teilbar sind. In der Tat sind die Glieder von $C(x)$ von der Form

$x^{m\pi_k + \lambda_\nu^{(k)}}$ $m = 0, 1, \dots, b_{k+1} - 1, \nu = 1, 2, \dots, \Phi(k)$, und die Exponenten dieser Glieder alle voneinander verschieden, da alle auftretenden $\lambda_\nu^{(k)}$ voneinander verschieden sind. Ist nun ν eine feste Zahl, $\nu \leq \Phi(k)$, dann stimmt das Restsystem der Exponenten $\lambda_\nu^{(k)}, \pi_k + \lambda_\nu^{(k)}, 2\pi_k + \lambda_\nu^{(k)}, \dots, (b_{k+1} - 1)\pi_k + \lambda_\nu^{(k)}$ modulo b_{k+1} , da b_{k+1} und π_k teilerfremd sind, abgesehen von der Anordnung überein mit dem Restsystem $0, 1, \dots, b_{k+1} - 1$ modulo b_{k+1} . Für ein bestimmtes $m \leq b_{k+1} - 1$ ist also $m\pi_k + \lambda_\nu^{(k)} \equiv 0 \pmod{b_{k+1}}$, das heisst

$$m\pi_k + \lambda_\nu^{(k)} = q b_{k+1}, \quad q \text{ ganz}, \quad m \leq b_{k+1} - 1, \quad \nu \leq \Phi(k). \quad (2.4)$$

q ist aber durch keine der Zahlen von $B^{(k)}$ teilbar, denn wäre q durch eine dieser b -Zahlen teilbar, so müsste nach (2.4), da π_k durch $b_1, b_2, \dots, b_k$ teilbar ist, auch $\lambda_\nu^{(k)}$ durch eine dieser Zahlen teilbar sein, was aber der Definition der $\lambda_\nu^{(k)}$ widerspricht. Aus (2.4) folgt

$q b_{k+1} = m\pi_k + \lambda_\nu^{(k)} < (b_{k+1} - 1)\pi_k + \pi_k = \pi_{k+1}$, also $q < \pi_k$. Da q durch keine Zahl von $B^{(k)}$ teilbar und kleiner als π_k ist, so muss $q = \lambda_\mu^{(k)}$, $\mu \leq \Phi(k)$ sein. (2.4) lautet demnach

$$m\pi_k + \lambda_\nu^{(k)} = b_{k+1} \cdot \lambda_\mu^{(k)}, \quad \mu \leq \Phi(k). \quad (2.5)$$

Das heisst aber, zu einem festen ν gibt es ein bestimmtes m , und zu diesen Zahlen ν und m gehört ein bestimmtes μ , so dass (2.5) gilt. Gilt aber (2.5),

so gibt es zu einem bestimmten μ auch nur ein ν und nur ein m . Denn wäre für ganze ν, m, ν' und m' mit $m \pi_k + \lambda_\nu^{(k)} = b_{k+1} \lambda_\mu^{(k)}$ auch $m' \pi_k + \lambda_{\nu'}^{(k)} = b_{k+1} \lambda_\mu^{(k)}$ erfüllt, so wäre $(m' - m) \pi_k = \lambda_\nu^{(k)} - \lambda_{\nu'}^{(k)}$. Für $m \neq m'$ müsste $\lambda_\nu^{(k)} - \lambda_{\nu'}^{(k)}$ durch π_k teilbar sein, was aber unmöglich ist, da $\lambda_\nu^{(k)}$ und $\lambda_{\nu'}^{(k)}$ ja kleiner als π_k sind; es muss daher $m = m'$, also auch $\nu = \nu'$ sein. (2.5) ist somit $\Phi(k)$ mal erfüllt, es treten daher in der Tat wie behauptet alle Glieder von $D(x)$ in $C(x)$ auf.

Die restlichen Glieder von $C(x)$ haben Exponenten, die durch keine b -Zahl von $B^{(k)}$ teilbar sind und modulo b_{k+1} die Reste $1, \dots, b_{k+1} - 1$ lassen, sie sind folglich in der Tat durch keine Zahl von $B^{(k+1)}$ teilbar.

In $C(x) - D(x)$ gibt es $\Phi(k+1)$ Glieder von der Form $x^{\lambda^{(k+1)}}$, denn die Anzahl der Glieder von $C(x)$ ist $\Phi(k) b_{k+1}$ und die von $D(x)$ ist $\Phi(k)$ die Anzahl der Glieder von $C(x) - D(x)$ beträgt daher

$$\Phi(k) b_{k+1} - \Phi(k) = b_{k+1} \Phi(k) \left(1 - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \Phi(k+1).$$

Damit ist nun aber gezeigt, dass (2.3) für $n = k + 1$ wahr ist und folglich für alle n gilt. Aus dem Satz 2 ergibt sich nun die Potenzreihe für $f_n(x)$:

SATZ 3. In $|x| < 1$ gilt für jedes n

$$f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_\nu^{(n)}}.$$

Aus (2.3) folgt in $|x| < 1$

$$f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\Phi(n)} x^{\lambda_\nu^{(n)}} \sum_{\mu=0}^{\infty} x^{\mu \pi_n} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\Phi(n)} x^{\mu \pi_n + \lambda_\nu^{(n)}}.$$

Nach (1.1) sind die Exponenten $\mu \pi_n + \lambda_\nu^{(n)}$, $\mu = 0, 1, \dots, \nu \leq \Phi(n)$ Zahlen $\lambda_\nu^{(n)}$ und bilden die Gesamtheit der möglichen $\lambda_\nu^{(n)}$.

2.2.

Die Funktionen $g_n(x)$

D₉ Sind $f_n(x)$ die in (2.1) definierten Funktionen, so definieren wir nun die Funktionen $g_n(x)$ rekurrent durch folgende Gleichungen:

$$g_0(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu \log \nu, \quad (2.6)$$

$$g_{n+1}(x) = g_n(x) - g_n(x^{b_{n+1}}) - f_n(x^{b_{n+1}}) \log b_{n+1},$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad |x| < 1.$$

Diese Funktionen sind analytisch in $|x| < 1$, denn jedes $g_n(x)$ ist eine Summe von endlich vielen in $|x| < 1$ analytischen Funktionen. Für $g_n(x)$ gilt die Darstellung:

Satz 4. In $|x| < 1$ gilt für jedes n

$$g_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_{\nu}^{(n)}} \log \lambda_{\nu}^{(n)}.$$

Die Potenzreihe von $f_0(x^{b_1}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_1 \nu}$ enthält nur Glieder, deren Exponenten die natürlichen Zahlen umfassen, welche durch b_1 teilbar sind. Nun ist auf Grund von (2.6)

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \log \nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_1 \nu} \log \nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_1 \nu} \log b_1 = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \log \nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_1 \nu} \log b_1 \nu, \end{aligned}$$

und man erkennt, dass $g_1(x)$ nur noch Glieder enthält, deren Exponenten und Numeri der Koeffizienten nicht durch b_1 teilbar sind. Die Folge der Exponenten der Glieder der Potenzreihe von $g_1(x)$ ist daher mit der Folge der $\lambda_{\nu}^{(1)}$ identisch, und Satz 4 ist richtig für $n = 1$.

Satz 4 sei richtig für $n = k$. Ist $n = k + 1$ und $|x| < 1$, so folgt aus (2.6)

$$g_{k+1}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_{\nu}^{(k)}} \log \lambda_{\nu}^{(k)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_{k+1} \lambda_{\nu}^{(k)}} \log \lambda_{\nu}^{(k)} - f_k(x^{b_{k+1}}) \log b_{k+1},$$

wo nach Satz 3 die Folge der Exponenten der Glieder der Potenzreihe von

$$f_k(x^{b_{k+1}}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_{k+1} \lambda_{\nu}^{(k)}}$$

alle natürlichen Zahlen enthält, welche nicht durch $b_1, b_2, \dots, b_k$, aber durch b_{k+1} teilbar sind. Da also

$$g_{k+1}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_{\nu}^{(k)}} \log \lambda_{\nu}^{(k)} - \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{b_{k+1} \lambda_{\nu}^{(k)}} \log b_{k+1} \lambda_{\nu}^{(k)}$$

ist, so enthält $g_{k+1}(x)$ nur noch Glieder, deren Exponenten und Numeri der Koeffizienten die Zahlen $\lambda_{\nu}^{(k+1)}$ sind, d. h.

$$g_{k+1}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_{\nu}^{(k+1)}} \log \lambda_{\nu}^{(k+1)}.$$

Satz 4 ist folglich wahr für $n = k + 1$ und ist daher für alle n richtig.

2.3. Die Funktionen $h_n(x)$

D_{10} Die Funktionen $h_n(x)$ definieren wir rekurrent durch die Gleichungen:

$$h_0(x) = \log \frac{1}{1-x}, \quad h_{n+1}(x) = h_n(x) - \frac{1}{b_{n+1}} h_n(x^{b_{n+1}}), \quad (2.7)$$

$$n = 0, 1, \dots, \quad |x| < 1.$$

Jedes $h_n(x)$ ist in $|x| < 1$ analytisch, denn es ist eine Summe von endlich vielen in $|x| < 1$ analytischen Funktionen von x .

Zwischen $h_n(x)$ und der in (2.1) definierten Funktion $f_n(x)$ besteht nun die folgende Beziehung:

SATZ 5. In $|x| < 1$ gilt für jedes n

$$x h'_n(x) = f_n(x).$$

Ist $n = 1$ und $|x| < 1$, so folgt aus (2.1) und (2.7)

$$x h'_1(x) = x \left(\log \frac{1}{1-x} - \frac{1}{b_1} \log \frac{1}{1-x^{b_1}} \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} - \frac{x^{b_1-1}}{1-x^{b_1}} \right) = f_1(x).$$

Satz 5 ist also wahr für $n = 1$.

Satz 5 sei wahr für $n = k$. Ist $n = k + 1$, so folgt aus (2.1) und (2.7) in $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} x h'_{k+1}(x) &= x h'_k(x) - \frac{x}{b_{k+1}} [h_k(x^{b_{k+1}})]' = \\ &= x h'_k(x) - x^{b_{k+1}} \frac{d h_k(x^{b_{k+1}})}{d x^{b_{k+1}}} = \\ &= f_k(x) - f_k(x^{b_{k+1}}) = f_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Satz 5 ist wahr für $n = k + 1$ und gilt daher für alle n . Aus diesem Ergebnis folgt nun:

SATZ 6. Ist $|x| < 1$, so gilt für jedes n

$$h_n(x) = \int_0^x \frac{f_n(x)}{x} dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda_\nu^{(n)}}}{\lambda_\nu^{(n)}} = \sum_{\beta < M(n)} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} \log \frac{1}{1-x^\beta}.$$

Setzen wir zum Beweise $i_n(x) = f_n(x)/x$, so ist nach (2.3) und D_2 $i_n(0) = 1$ für jedes n . $i_n(x)$ ist daher für jeden Wert von x in $|x| < 1$ definiert und nach Satz 3 auch analytisch. Aus Satz 5 folgt daher

$i_n(x) = h_n'(x)$, und weil nach (2.7) sukzessive $h_0(0) = h_1(0) = \dots = h_n(0) = 0$ folgt, so ergibt sich aus Satz 1

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \int_0^x \frac{f_n(x)}{x} dx = \sum_{\beta \prec M^{(n)}} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} \int_0^x \frac{\beta x^{\beta-1}}{1-x^\beta} dx = \\ &= \sum_{\beta \prec M^{(n)}} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} \log \frac{1}{1-x^\beta}, \end{aligned}$$

bzw. aus Satz 3

$$h_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^x x^{\lambda_v^{(n)}-1} dx = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda_v^{(n)}}}{\lambda_v^{(n)}}.$$

Damit ist aber Satz 6 bewiesen.

§ 3. Die Grenzfunktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$

3.1. Es gilt der

Satz 7. Für $n \rightarrow \infty$ streben die Folgen $f_n(x)$, $g_n(x)$ und $h_n(x)$ in jedem Punkte $x \prec J$ gegen je eine in J stetige Grenzfunktion

$$f(x) = \sum_{\beta \prec M} (-1)^{\omega(\beta)} \frac{x^\beta}{1-x^\beta} = \sum_{v=1}^{\infty} x^{\lambda_v}, \quad (3.1)$$

$$g(x) = \sum_{v=1}^{\infty} x^{\lambda_v} \log \lambda_v, \quad (3.2)$$

$$h(x) = \sum_{\beta \prec M} \frac{(-1)^{\omega(\beta)}}{\beta} \log \frac{1}{1-x^\beta} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda_v}}{\lambda_v}, \quad (3.3)$$

und die Konvergenz ist in jedem Intervall $J(r)$ gleichmässig.

Wir beweisen zunächst (3.1) und (3.3). Da die Zahlen b_n von B monoton mit n wachsen, so folgt, dass alle $\lambda^{(n+k)}$, $k = 0, 1, \dots$, die kleiner sind als b_{n+1} , nicht nur durch keine Zahl von $B^{(n)}$, sondern überhaupt durch keine Zahl von B teilbar sind. Das besagt aber, dass die Potenzreihen von $f_{n+k}(x)$ und $f_n(x)$ sicher in den Gliedern übereinstimmen, deren Exponenten kleiner als b_{n+1} sind. Aus Satz 3 folgt daher für jedes feste $x \prec J$, für jedes n und alle $k \geq 1$

$$0 \leq f_n(x) - f_{n+k}(x) < 2 \sum_{\lambda^{(n)} \geq b_{n+1}} x^{\lambda^{(n)}} < 2 \frac{x^{b_{n+1}}}{1-x},$$

was besagt, dass in jedem Punkte $x \prec J$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ existiert, und

zwar gleichmässig in $J(r)$. Weiter folgt aus Satz 3, da man in $J(r)$ mit der Potenzreihe von $f_n(x)$ gliedweise zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergehen darf,

dass die Potenzreihe von $f(x)$ nur Glieder enthält, deren Exponenten Zahlen λ_ν sind. Es ist somit $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_\nu}$; folglich ist $f(x)$ in J auch stetig.

Bezeichnen wir mit

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1-x^\nu} \quad 11$$

die in $|x| < 1$ gleichmässig konvergente Lambertsche Reihe, so folgt aus Satz 1 für $x < J$

$$f_n(x) = \sum_{\beta < M(n)} (-1)^{\omega(n)(\beta)} \frac{x^\beta}{1-x^\beta} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{1-x^\nu}.$$

Daraus folgt aber (3.1) im ganzen Umfange.

Nun ist für $n \rightarrow \infty$ und alle $x < J(r)$ $f_n(x)/x \Rightarrow f(x)/x$, es folgt daher aus Satz 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \int_0^x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{x} dx = \int_0^x \frac{f(x)}{x} dx = h(x).$$

Weil aber die Potenzreihe und die Lambertsche Reihe von $f(x)/x$ in $J(r)$ gleichmässig konvergieren, so ergibt sich durch gliedweise Integration dieser Reihen die Relation (3.3).

Wir haben nunmehr noch (3.2) zu beweisen. Nach Satz 4 gilt für jedes

$$x < J \quad 0 \leq g_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\lambda_\nu^{(n)}} \log \lambda_\nu^{(n)} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu \log \nu;$$

nach dem oben über $f_n(x)$ Gesagten folgt entsprechend, dass in J

$$0 \leq g_n(x) - g_{n+k}(x) < 2 \sum_{\lambda^{(n)} \geq b_{n+1}} x^{\lambda^{(n)}} \log \lambda^{(n)} \leq 2 \sum_{\nu \geq b_{n+1}} x^\nu \log \nu$$

ist, und zwar für jedes n und alle $k \geq 1$. Daraus folgt aber, dass $g_n(x)$ für jedes feste $x < J$ gegen eine Grenzfunktion $g(x)$ strebt, und zwar gleichmässig in $J(r)$, wenn $n \rightarrow \infty$. Aus Satz 4 folgt aber nun, da man in $J(r)$ gliedweise zur Grenze $n \rightarrow \infty$ übergehen darf, dass die Potenzreihe von $g(x)$ nur Glieder enthält, deren Exponenten und Numeri der Koeffizienten Zahlen λ_ν sind. Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

3.2. Betrachten wir nun noch die Zahlen $B(m)$ von D_2 . Die Zahlen $B(m)$ sind die Koeffizienten der Glieder der aus dem Cauchyschen Produkt von $f(x) \cdot f(x)$ entstehenden Potenzreihe; es gilt daher der

$$\text{SATZ 8. Ist } x < J, \text{ so ist } f^2(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} B(\nu) x^\nu.$$

¹¹ Vgl. K. KNOPP, Unendliche Reihen, S. 448.

Ist B die Folge der Primzahlen, so ist M die Menge der quadratfreien Zahlen; aus (3.1) und (3.3) folgt daher, wenn $\mu(v)$ die Möbiussche Funktion bedeutet

KOROLLAR 1. Ist $x \prec J$, so gilt

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu(v) x^v}{1-x^v} = x, \\ \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\mu(v)}{v} \log \frac{1}{1-x^v} = x.$$

§ 4. Das Verhalten der Funktionen $f_n(x)$, $g_n(x)$, $h_n(x)$ und ihrer Grenzfunktionen für $x \uparrow 1$

4.1. Für $f_n(x)$ gilt der

SATZ 9. Für jedes n ist

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(f_n(x) - \frac{P(n)x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} P(n).$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion und setzen

$$C_k(x) = f_k(x) - \frac{P(k)x}{1-x}, \quad D_k(x) = \frac{x}{b_k(1-x)} - \frac{x^{b_k}}{1-x^{b_k}}.$$

Ist $n = 1$ und $x \prec J$, so folgt aus (2.1)

$$C_1(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{b_1}}{1-x^{b_1}} - P(1) \frac{x}{1-x} = D_1(x),$$

und daher nach (1.9) $\lim_{x \uparrow 1} C_1(x) = \frac{1}{2} P(1)$. Satz 9 ist wahr für $n = 1$.

Satz 9 sei wahr für $n = k$. Ist $n = k+1$, so folgt aus (2.1)

$$\begin{aligned} C_{k+1}(x) &= f_k(x) - f_k(x^{b_{k+1}}) - \left(1 - \frac{1}{b_{k+1}}\right) \frac{P(k)x}{1-x} = \\ &= \left(f_k(x) - \frac{P(k)x}{1-x}\right) - \left(f_k(x^{b_{k+1}}) - \frac{P(k)x^{b_{k+1}}}{1-x^{b_{k+1}}}\right) + P(k)D_{k+1}(x) = \\ &= C_k(x) - C_k(x^{b_{k+1}}) + P(k)D_{k+1}(x), \end{aligned}$$

und da $\lim_{x \uparrow 1} C_k(x) = \frac{1}{2} P(k)$ und nach (1.9) $\lim_{x \uparrow 1} D_{k+1}(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{b_{k+1}}\right)$ ist, so ergibt sich $\lim_{x \uparrow 1} C_{k+1}(x) = P(k) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{b_{k+1}}\right) = \frac{1}{2} P(k+1)$. Satz 9 ist folglich für $n = k+1$ wahr und gilt daher für jedes n .

Wir brauchen nun das folgende

LEMMA 10. Ist $x < J$, so gilt für jedes natürliche b

$$0 \leq (1-x) f_n(x^b) < \frac{1}{b}.$$

In J ist nämlich nach Satz 3 $0 \leq f_n(x) \leq x/(1-x)$, also auch $0 \leq f_n(x^b) \leq x^b/(1-x^b)$, d. h. aber

$$0 \leq (1-x) f_n(x^b) \leq \frac{x^b}{1+x+\dots+x^{b-1}} < \frac{x^b}{bx^{b-1}} < \frac{1}{b}, \text{ w.z.b.w.}$$

Wir sind jetzt in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

SATZ 10. Ist $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v}$ konvergent, so ist

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{v=1}^{\infty} x^{\lambda_v} = P, \quad (4.1)$$

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^2 \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v x^{\lambda_v-1} = P, \quad (4.2)$$

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x)^2 \sum_{v=1}^{\infty} B(v) x^v = P^2. \quad (4.3)$$

Aus (2.1) und Lemma 10 folgt für $x < J$

$$\begin{aligned} (1-x) f_n(x) &= (1-x) f_0(x) + (1-x) \sum_{v=1}^n (f_v(x) - f_{v-1}(x)) = \\ &= x - (1-x) \sum_{v=1}^n f_{v-1}(x^{b_v}) \leq 1 + \sum_{v=1}^n \frac{1}{b_v}, \end{aligned}$$

und daraus $(1-x) f_n(x) \Rightarrow (1-x) f(x)$ in $0 \leq x \leq 1$, wenn $n \rightarrow \infty$, da $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v}$ konvergiert. Aus Lemma 7, dem Satze 8 und dem Vertauschungssatz¹² folgt nun

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \uparrow 1} (1-x) f_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x) f_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} (1-x) f(x),$$

und daraus nach (3.1) die Relation (4.1). Aus (4.1) und Satz II folgt nunmehr (4.2) und aus Satz 8 und (4.1) die Relation (4.3).

¹² A. OSTROWSKI, II., S. 146 (44.2).

4.2. Wir untersuchen nun das Verhalten von $g_n(x)$ und $g(x)$ für $x \uparrow 1$, setzen zur Abkürzung $a(x) = (1-x) \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1}$ und beweisen zunächst das

LEMMA 11. Ist $b \geq 2$ eine natürliche Zahl, so gilt in J_0

$$0 < a(x) g_n(x^b) < \frac{1}{b}.$$

Ist $h_n = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu}$, so ist bekanntlich¹³ für $n \rightarrow \infty$ stets $h_n - \log n \downarrow \gamma$, wo γ die Eulersche Konstante ist. Also gilt $h_n > \log n$ und daher in J_0

$$a^{-1}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_{\nu} x^{\nu} > \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\nu} \log \nu = g_0(x) > 0.$$

d. h.

$$0 < a(x) g_0(x) < 1.$$

Daraus folgt nun, da nach (2.6) und Satz 4 für jedes n in J_0 $0 < g_n(x) < g_0(x)$ ist,

$$0 < a(x) g_n(x) < 1,$$

$$0 < a(x^b) g_n(x^b) < 1.$$

Mit Hilfe von (1.8) ergibt sich aus der letzten Ungleichung

$$0 < b a(x) g_n(x^b) < 1, \text{ w. z. b. w.}$$

Nunmehr folgt der

SATZ 11. Für jedes n gilt $\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} g_n(x) = P(n)$.

Im Beweise setzen wir zur Abkürzung

$$C_k(x) = a(x) g_k(x) \text{ und } D_k(x) = a(x) f_k(x^{b_{k+1}}) \log b_{k+1}.$$

Ist $n = 1$, so folgt aus (2.6)

$$C_1(x) = C_0(x) - a(x) a^{-1}(x^{b_1}) C_0(x^{b_1}) - D_0(x).$$

Es ist nun offenbar

$$\lim_{x \uparrow 1} D_0(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{x^{b_1(1-x)} \log b_1}{(1-x^{b_1}) \log \frac{1}{1-x}} = 0$$

¹³ A. OSTROWSKI, II., S. 98, A. 39.

und bekanntlich¹⁴ $\lim_{x \uparrow 1} C_0(x) = 1$; aus der obigen Gleichung für $C_1(x)$ und (1.10) ergibt sich daher $\lim_{x \uparrow 1} C_1(x) = 1 - \frac{1}{b_1} = P(1)$. Satz 11 ist wahr für $n = 1$.

Satz 11 sei wahr für $n = k$. Ist $n = k + 1$, so folgt aus (2.6)

$$C_{k+1}(x) = C_k(x) - a(x) a^{-1}(x^{b_{k+1}}) C_k(x^{b_{k+1}}) - D_k(x) .$$

Nun ist nach Satz 9

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) f_k(x^{b_{k+1}}) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{1-x}{1-x^{b_{k+1}}} \lim_{x \uparrow 1} (1-x^{b_{k+1}}) f_k(x^{b_{k+1}}) = \frac{P(k)}{b_{k+1}} ,$$

es ergibt sich daher

$$\lim_{x \uparrow 1} D_k(x) = \lim_{x \uparrow 1} \frac{\log b_{k+1}}{\log \frac{1}{1-x}} \lim_{x \uparrow 1} (1-x) f_k(x^{b_{k+1}}) = 0 .$$

Da nach Annahme $\lim_{x \uparrow 1} C_k(x) = P(k)$ ist, so ergibt sich aus der obigen Gleichung für $C_{k+1}(x)$ und (1.10), weil $\lim_{x \rightarrow 1} D_k(x) = 0$ ist,

$$\lim_{x \uparrow 1} C_{k+1}(x) = P(k) - \frac{P(k)}{b_{k+1}} = P(k+1) .$$

Satz 11 ist folglich wahr für $n = k + 1$, er gilt daher für alle n .

Wir beweisen nun den

SATZ 12. Ist $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v}$ konvergent, so ist

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} x^{\lambda_v} \log \lambda_v = P .$$

Aus (2.6) folgt für $x < J_0$

$$\begin{aligned} a(x) g_n(x) - a(x) \left(g_0(x) + \sum_{v=1}^n (g_v(x) - g_{v-1}(x)) \right) &= \\ &= a(x) g_0(x) - \sum_{v=1}^n a(x) g_{v-1}(x^{b_v}) - \sum_{v=1}^n a(x) f_{v-1}(x^{b_v}) \log b_v . \end{aligned}$$

Daraus folgt nun nach den Lemmata 10 und 11 und weil in J_0

$\log \frac{1}{1-x} \geq x$ ist,

$$0 < a(x) \sum_{v=1}^{\infty} x^{\lambda_v^{(n)}} \log \lambda_v^{(n)} \ll 1 + \sum_{v=1}^n \frac{1}{b_v} + \sum_{v=1}^n \frac{\log b_v}{b_v} .$$

¹⁴ Vgl. E. C. TITCHMARSH, S. 242, Ex. 5.

Wegen der Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v}$ ergibt sich daher in $0 < x \leq 1$

$$a(x) g_n(x) \Rightarrow a(x) g(x).$$

Aus Satz 11 und Lemma 7 folgt nach dem Vertauschungssatze

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \uparrow 1} a(x) g_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} a(x) g_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} a(x) g(x).$$

Damit ist aber Satz 12 bewiesen.

4.3. In diesem Abschnitt setzen wir zur Abkürzung

$$C_k(x) = h_k(x) - P(k) \log \frac{1}{1-x}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Es gilt der

$$\text{SATZ 13. Es ist für jedes } n \quad \lim_{x \uparrow 1} (h_n(x) - P(n) \log \frac{1}{1-x}) = P(n) Q(n).$$

Ist $n = 1$ und $x < J$, so folgt aus (2.7)

$$C_1(x) = \log \frac{1}{1-x} - \frac{1}{b_1} \log \frac{1}{1-x^{b_1}} - \left(1 - \frac{1}{b_1}\right) \log \frac{1}{1-x} = \frac{1}{b_1} \log \frac{1-x^{b_1}}{1-x},$$

und daher $\lim_{x \uparrow 1} C_1(x) - \frac{1}{b_1} \log b_1 = P(1) Q(1)$. Satz 13 ist wahr für $n = 1$.

Satz 13 sei wahr für $n = k$. Ist $n = k+1$ und $x < J$, so folgt aus (2.7)

$$\begin{aligned} C_{k+1}(x) &= h_k(x) - \frac{1}{b_{k+1}} h_k(x^{b_{k+1}}) - \left(1 - \frac{1}{b_{k+1}}\right) P(k) \log \frac{1}{1-x} = \\ &= C_k(x) - \frac{1}{b_{k+1}} C_k(x^{b_{k+1}}) + \frac{P(k)}{b_{k+1}} \log \frac{1-x^{b_{k+1}}}{1-x}. \end{aligned}$$

Da nun nach Annahme $\lim_{x \uparrow 1} C_k(x) = P(k) Q(k)$ ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 1} C_{k+1}(x) &= P(k) Q(k) - \frac{1}{b_{k+1}} P(k) Q(k) + P(k) \frac{\log b_{k+1}}{b_{k+1}} = \\ &= P(k+1) Q(k) + P(k+1) \frac{\log b_{k+1}}{b_{k+1}-1} = P(k+1) Q(k+1). \end{aligned}$$

Also ist Satz 13 wahr für $n = k+1$ und gilt daher für alle n .

Es gilt jetzt der

$$\text{SATZ 14. Ist } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v} \text{ konvergent, so ist } \lim_{x \uparrow 1} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^{b_v}}{b_v} = P.$$

Aus Satz 6 und (2.7) ergibt sich in J_0 für natürliche b

$$0 < h_n(x^b) < h_n(x) < \log \frac{1}{1-x}, \quad \text{also } 0 < \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h_n(x^b) < 1.$$

Daraus folgt nun nach (2.7)

$$\begin{aligned} 0 < \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h_n(x) &= \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \left(h_0(x) + \sum_{\nu=1}^n (h_\nu(x) - h_{\nu-1}(x)) \right) = \\ &= 1 - \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{\nu=1}^n \frac{h_{\nu-1}(x^{\beta_\nu})}{b_\nu} \ll 1 + \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{b_\nu}. \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{b_\nu}$ ist daher in $0 < x \leq 1$

$$\left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h_n(x) \Rightarrow \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h(x) .$$

Es ist folglich, wegen Lemma 7 und Satz 13, nach dem Vertauschungssatze

$$\begin{aligned} P &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \uparrow 1} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h_n(x) = \\ &= \lim_{x \uparrow 1} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} h(x) . \end{aligned}$$

Satz 14 ist also wahr.

Nunmehr gilt

SATZ 15. Ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log b_\nu}{b_\nu}$ konvergent, so ist

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda_\nu}}{\lambda_\nu} - P \log \frac{1}{1-x} \right) = PQ .$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^n \frac{\log b_\nu}{b_\nu}$ existieren nach Lemma 7 P, Q, R und S , und es ist für alle n $P(n) < S$. Aus Satz 6 und (1.3) folgt in J

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{\beta < M(n)} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} \log \frac{1}{1-x^\beta} - \sum_{\beta < M(n)} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} \log \frac{1}{1-x} = \\ &= - \sum_{\beta < M(n)} \frac{(-1)^{\omega(n)(\beta)}}{\beta} \log (1 + x + \dots + x^{\beta-1}) , \end{aligned}$$

also ist nach (1.6)

$$|C_n(x)| \leq \sum_{\beta < M(n)} \frac{\log \beta}{\beta} = R(n)S(n) < RS .$$

Da $C_0(x) = 0$ ist, so ergibt sich aus (2.7)

$$C_n(x) - C_{n-1}(x) = \frac{P(n-1)}{b_n} \log \frac{1-x^{b_n}}{1-x} - \frac{C_{n-1}(x^{b_n})}{b_n}, \text{ also}$$

$$|C_n(x) - C_{n-1}(x)| \leq \frac{P(n-1)}{b_n} \log b_n + \frac{|C_{n-1}(x^{b_n})|}{b_n} < S \frac{\log b_n}{b_n} + \frac{RS}{b_n}.$$

Daraus folgt nun

$$C_n(x) = \sum_{\nu=1}^n (C_\nu(x) - C_{\nu-1}(x)) \ll S \sum_{\nu=1}^n \frac{\log b_\nu}{b_\nu} + RS \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{b_\nu}.$$

$C_n(x)$ konvergiert daher in $0 \leq x \leq 1$ gleichmässig gegen eine Grenzfunktion. Aus Satz 13 und dem Vertauschungssatze ergibt sich somit

$$PQ = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \uparrow 1} C_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(x) = \lim_{x \uparrow 1} \left(h(x) - P \log \frac{1}{1-x} \right),$$

d. h. der Satz 15.

ZUSAMMENFASSUNG DES III. UND IV. KAPITELS

Im § 5 bzw. § 6 werden rekurrent die Funktionen $F_n(x)$, $G_n(x)$ und $H_n(x)$ erzeugt, bzw. die Grenzfunktionen $F(x)$, $G(x)$ und $H(x)$ betrachtet.

Es gilt für $|x| < 1$ und jedes n

$$F_n(x) = \sum_{\beta < M(n)} \frac{x^\beta}{1-x^\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\omega(n)(\nu)} x^\nu$$

$$G_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu 2^{\omega(n)(\nu)} \log \nu$$

$$H_n(x) = \sum_{\beta < M(n)} \frac{1}{\beta} \log \frac{1}{1-x^\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)(\nu)}}{\nu} x^\nu.$$

Ist $x < J$, so gilt

$$F(x) = \sum_{\beta < M} \frac{x^\beta}{1-x^\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\omega(\nu)} x^\nu$$

$$G(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x^\nu 2^{\omega(\nu)} \log \nu$$

$$H(x) = \sum_{\beta < M} \frac{1}{\beta} \log \frac{1}{1-x^\beta} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(\nu)}}{\nu} x^\nu.$$

Der § 7 ist dem Grenzverhalten dieser Funktionen für $x \uparrow 1$ gewidmet, und es gilt für jedes n

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(F_n(x) - \frac{x S(n)}{1-x} \right) = \frac{1}{2} S(n) - 2^{n-1}$$

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} G_n(x) = S(n)$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(S(n) \log \frac{1}{1-x} - H_n(x) \right) = R(n) S(n).$$

Ist $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v}$ konvergent, so ist

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \sum_{v=1}^{\infty} t(v) x^v = S$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t(v)}{v} x^v = S.$$

Ist $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\log b_v}{b_v}$ konvergent, so ist

$$\lim_{x \uparrow 1} (1-x) \left(\log \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} x^v t(v) \log v = S$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \left(S \log \frac{1}{1-x} - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t(v)}{v} x^v \right) = RS.$$

Aus den Abelschen Summen der §§ 4 und 7 ergeben sich mit Hilfe der Sätze I bis VIII des § 1 die folgenden zahlentheoretischen Aussagen:

Ist $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{b_v}$ konvergent, so gilt für $N \rightarrow \infty$

$$A(n) \sim PN$$

$$\sum_{\lambda \leq N} \frac{1}{\lambda} \sim P \log N$$

$$\sum_{\lambda \leq N} \lambda \sim \frac{1}{2} P N^2$$

$$\sum_{v=2}^N B(v) \sim \frac{1}{2} P^2 N^2$$

$$T(N) \sim SN$$

$$\sum_{v=1}^N \frac{t(v)}{v} \sim S \log N.$$

Ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\log b_{\nu}}{b_{\nu}}$ konvergent, γ die Eulersche Konstante, so gilt für $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{\lambda \leq N} \log \lambda \sim PN \log N$$

$$\sum_{\lambda \leq N} \frac{1}{\lambda} - P \log N \rightarrow (\gamma + Q)P$$

$$\sum_{\nu=1}^N t(\nu) \log \nu \sim SN \log N$$

$$S \log N - \sum_{\nu=1}^N \frac{t(\nu)}{\nu} \rightarrow (R - \gamma)S.$$

Ferner gilt für jedes n

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N A^{(n)}(\nu) - \frac{1}{2} NP(n) \right) = P(n)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} NS(n) - \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N T^{(n)}(\nu) \right) = 2^{n-1} - S(n)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(A^{(n)}(N) - \frac{1}{2} NP(n) - \frac{1}{N} \sum_{\lambda^{(n)} \leq N} \lambda^{(n)} \right) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \nu t^{(n)}(\nu) + \frac{1}{2} NS(n) - T^{(n)}(N) \right) = 2^{n-1}.$$

Es gelten nun noch die folgenden Relationen für jedes n

$$\sum_{\lambda^{(n)} \leq \pi_n} \lambda^{(n)} = \frac{1}{2} P(n)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\pi_n} \nu t^{(n)}(\nu) = \frac{1}{2} S(n) \pi_n^2 + \pi_n 2^{n-1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\pi_n} A^{(n)}(\nu) = \frac{1}{2} P(n) \pi_n^2 + \pi_n P(n)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\pi_n} T^{(n)}(\nu) = \frac{1}{2} S(n) \pi_n^2 + \pi_n S(n) - \pi_n 2^{n-1}$$

LITERATUR

- BROMWICH, T. J. I'a (1926): *An introduction to the theory of infinite series*.
HARDY, G. H. (1949): *Divergent series*, Oxford.
KNOPP, K. (1924): *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, 2. Auflage.
OSTROWSKI, A. (1945, 1951): *Vorlesungen über Infinitesimalrechnung*, Bd. I, 1945;
Bd. II, 1951.
POLYA, G. & SZEGÖ, G. (1925): *Aufgaben und Lehrsätze I. und II*, Berlin.
TITCHMARSH, E. C., (1932): *Theory of functions*, Oxford.
DICKSON-BODEWIG (1931): *Einführung in die Zahlentheorie*, Teubner.

Manuskript eingegangen am 7. September 1958

Curriculum vitae

Ich, Hans Richard Gutmann, Bürger von Basel, wurde am 14. Februar 1907 in Basel als Sohn des Mechanikers Johann Gutmann (gestorben am 22. März 1930) und seiner Gattin Anna Maria Wittmer (gestorben am 16. Juli 1921) geboren. Ich besuchte hier die Schulen und erhielt im Herbst 1925 an der damaligen Oberen Realschule das Zeugnis der Reife. Vom Wintersemester 1925 bis Wintersemester 1937/38 war ich an der Universität Basel immatrikuliert und studierte Mathematik, Astronomie, Experimentalphysik, Geographie, Psychologie und Theoretische Physik. Ich besuchte Vorlesungen und Übungen bei den folgenden Herren Professoren: Buchner, Häberlin, Hagenbach, Jaeger, Matthies, Mohrmann, Niethammer, Ostrowski, Spiess, Vosseler, Wehrli und Zickendraht.

Vom Sommersemester 1930 bis Mitte Januar 1935 war ich Assistent des Ordinarius für Mathematik, Herrn Prof. Dr. A. Ostrowski.

Im Schuljahr 1933/34 besuchte ich das Lehrerseminar unserer Stadt und bestand im Frühjahr 1934 das pädagogische Oberlehrerexamen. Im Herbst 1934 legte ich in den Fächern Mathematik, Experimentalphysik und Geographie die theoretische Oberlehrerprüfung ab und erhielt darauf das Diplom für das höhere Lehramt.

Seit Mitte Januar 1935 erteile ich Unterricht in Mathematik am hiesigen Realgymnasium, an dem ich im Frühjahr 1937 definitiv angestellt wurde. Im Frühjahr 1944 übernahm ich den Mathematikunterricht an den staatlichen Maturitätskursen für Berufstätige und erhielt im April 1955 die Leitung dieser Institution.

Im Sommer 1937 verheiratete ich mich mit Frl. Alice Brodmann. Der Ehe entsprossen zwei Kinder.

Allen meinen Lehrern bin ich zu grossem Dank verpflichtet. Die vorliegende Arbeit, die 1953 entstanden ist, habe ich im Jahre 1954 unter Herrn Prof. Ostrowskis ordnender Hand überarbeitet. Ich danke Herrn Prof. Ostrowski für die Hilfe und für alles, das er mich gelehrt hat.

